



TITLE:

# 交代群の部分バーンサイド環の単元群 (有限群のコホモロジー論とその周辺)

AUTHOR(S):

小田, 文仁

---

CITATION:

小田, 文仁. 交代群の部分バーンサイド環の単元群 (有限群のコホモロジー論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2018, 2061: 81-92

ISSUE DATE:

2018-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/241856>

RIGHT:

# 交代群の部分バーンサイド環の単元群

近畿大学・理工学部 小田文仁 (Fumihito Oda)

本稿は、千葉大学教育学部澤辺正人氏との共同研究 [OS] に基づく。

## 1 Notation

$G$  は、有限群とする。  $(g)$  は、  $g \in G$  を含む  $G$  の共役類とする。  $\mathcal{cl}(G)$  は、  $G$  の共役類全体の集合とする。  $W_G(H)$  (または  $WH$ ) は、剰余群  $N_G(H)/H$ 、ただし、  $H$  は  $G$  の部分群、  $N_G(H)$  は  $H$  の  $G$  における正規化群、とする。二つの部分群  $H, K \leq G$  に対し、  $H \backslash G / K$  は  $G$  の  $H$  と  $K$  による両側剰余類、  $[H \backslash G / K]$  は、その完全代表系とする。  $(H)$  は、  $G$  の部分群  $H$  を含む共役類; すなわち、  $(H) = \{^g H \mid g \in G\}$ 、ただし、  $g \in G$  に対し、  $^g H := gHg^{-1}$ 、とする。  $G$ -集合  $X$  に対し、  $[X]$  は、  $X$  を含む  $G$ -集合の同型類、  $X$  が有限集合のとき、  $|X|$  は、  $X$  の要素の個数とする。  $\mathcal{D}$  は、  $G$  の部分群の collection を表す; すなわち、  $\mathcal{D}$  は、  $G$ -共役をとる操作で閉じている  $G$  の部分群の集合である。  $C(\mathcal{D})$  は、  $\mathcal{D}$  の  $G$ -共役類全体の集合とする; すなわち、  $C(\mathcal{D}) = \{(H) \mid H \in \mathcal{D}\}$ 。  $\mathcal{D}$  が  $G$  の部分群全体のとき  $C(\mathcal{D})$  を  $C(G)$  と書く。包含関係に関するポセット  $\mathcal{D}$  のメビウス関数を  $\mu_{\mathcal{D}}$  と書く。本稿では、環は単位元を持つものとする。  $\mathcal{O}^\times$  は、環  $\mathcal{O}$  の単元群とする。可換群  $M$  に対し、  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  を  $\mathbb{Q}M$  と書く。

## 2 Abstract

本稿では、対称群  $S_n$  の Young subgroup  $Y$  と交代群  $A_n$  との共通部分  $Y \cap A_n$  として得られる  $A_n$  の部分群の collection  $\mathfrak{A}_n$  に関する部分バーンサイド環  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  の単元群の階数 3 の部分群の存在が示される。

## 3 Preliminaries

この節では、第 5 節で用いられる部分バーンサイド環の基本的性質を準備する。

### 3.1 Homomorphisms between Burnside Rings

はじめに、バーンサイド環の間の準同型写像について [Yo90a] から準備する。  $H$  が  $G$  の部分群であるとき、  $G$  集合の圏から  $H$  集合の圏への制限関手  $\text{Res}_H^G$  を得る。その関手はバーンサイド環  $\Omega(G)$  から  $\Omega(H)$  への環準同型を誘導するので、群準同型

$$\text{Res}_H^G : \Omega(G)^\times \rightarrow \Omega(H)^\times \quad (3.1)$$

を誘導する。  $\Omega(G)$  の単位元を  $1 = [G/G]$  と書く。左  $G$ set  $X$  に対し、

$$\text{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

と書く。 [Di79, Proposition 1.2.2] により、任意の  $(K) \in C(G)$  に対し

$$\varphi_H : [G/K] \mapsto |\text{inv}_H(G/K)|, (H) \in C(G)$$

で与えられる写像

$$\varphi = (\varphi_H)_{(H) \in C(G)} : \Omega(G) \rightarrow \tilde{\Omega}(G) := \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z}$$

は単射環準同型である。任意の元  $x \in \Omega(G)$  に対し、  $x_H = \varphi_H(x)$  のとき、  $\varphi(x) = (x_H)_{(H) \in C(G)} \in \tilde{\Omega}(G)$  と書く。  $\theta \in \Omega(G)$  と  $(K) \in C(H)$  に対し、  $\text{Res}_H^G$  の定義は

$$\text{Res}_H^G(\theta)_K = \theta_K \quad (3.2)$$

が成り立つことを示す。

### 3.2 Fundamental theorem

$\mathcal{D}$  を  $G$  の部分群の collection とする.  $\mathcal{D}$  は共通部分をとる操作で閉じていて  $G$  を含むことを仮定する. このとき,  $[G/D]$ , ただし,  $D \in \mathcal{D}$ , で生成される  $\Omega(G)$  の部分加群  $\Omega(G, \mathcal{D})$  は, 部分環になる.  $\Omega(G, \mathcal{D})$  を  $G$  の  $\mathcal{D}$  に関する, 部分バーンサイド環 (PBR) と呼ぶ. ここで,  $\mathcal{D}$  に関する PBR  $\Omega(G, \mathcal{D})$  の基本定理と  $\mathbb{Q}\Omega(G, \mathcal{D})$  の原始べき等元公式を準備する. [Yo90b, Section 2] により, 任意の  $(K) \in C(\mathcal{D})$  に対し,

$$\varphi_H : [G/K] \mapsto |\text{inv}_H(G/K)|, (H) \in C(\mathcal{D})$$

で与えられる写像

$$\varphi^{\mathcal{D}} = (\varphi_H)_{(H) \in C(\mathcal{D})} : \Omega(G, \mathcal{D}) \rightarrow \tilde{\Omega}(G, \mathcal{D}) := \prod_{(H) \in C(\mathcal{D})} \mathbb{Z}$$

は, 単射環準同型である.

**Lemma 3.1.** [Yo90b, Example 3.15]  $\mathcal{D}$  が, 共通部分をとる操作で閉じていて  $G$  を含む  $G$  の collection であるならば,  $\Omega(G, \mathcal{D})$  は, PBR である.

部分群  $H \in \mathcal{D}$  に対し,  $\mathbb{Q}\Omega(G, \mathcal{D})$  の原始的べき等元

$$\varphi_K(e_H^{\mathcal{D}}) = \begin{cases} 1 & (H) = (K), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ただし  $(K) \in C(\mathcal{D})$ , を  $e_H^{\mathcal{D}}$  と書く. 以下のように原始的べき等元  $e_H^{\mathcal{D}}$  の公式を得る.

**Lemma 3.2.** [Yo90b, Theorem 4.2] Let  $\mathcal{D}$  be a collection of subgroups of  $G$ . Assume that  $\mathcal{D}$  is closed under taking intersection and  $\mathcal{D}$  contains  $G$ . Let  $e_H^{\mathcal{D}}$  be a primitive idempotent of  $\mathbb{Q}\Omega(G, \mathcal{D})$  for  $H \in \mathcal{D}$ . Then

$$e_H^{\mathcal{D}} = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \in \mathcal{D}} |D| \mu_{\mathcal{D}}(D, H) [G/D]. \quad (3.3)$$

$$\text{Obs}(G, \mathcal{D}) = \prod_{(H) \in C(\mathcal{D})} \mathbb{Z}/|W_G(H)|\mathbb{Z}$$

とおき, 部分群  $H \leq G$  に対し

$$\overline{H} = \begin{cases} \bigcap_{S \in \mathcal{D}(\geq H)} S & \mathcal{D}(\geq H) \neq \emptyset, \\ G & \mathcal{D}(\geq H) = \emptyset, \end{cases}$$

ただし,  $\mathcal{D}(\geq H) = \{D \in \mathcal{D} \mid H \leq D\}$  とする.

**Theorem 3.3.** [Yo90b, Theorem 3.10] Let  $\mathcal{D}$  be a collection of subgroups of  $G$ . Assume that  $\mathcal{D}$  is closed under taking intersection and  $G \in \mathcal{D}$ . Then there exists an exact sequence of abelian groups:

$$0 \rightarrow \Omega(G, \mathcal{D}) \xrightarrow{\varphi^{\mathcal{D}}} \tilde{\Omega}(G, \mathcal{D}) \xrightarrow{\psi^{\mathcal{D}}} \text{Obs}(G, \mathcal{D}) \rightarrow 0.$$

where  $(H)$ -component of  $\psi^{\mathcal{D}}$  is defined by

$$\psi^{\mathcal{D}}(\theta) = \left( \sum_{gD \in W_G(D)} \theta_{\langle g \rangle D} \mod |W_G(D)| \right)_{(D) \in C(\mathcal{D})}$$

for any  $\theta = (\theta_D)_{(D) \in C(\mathcal{D})} \in \tilde{\Omega}(G, \mathcal{D})$ .

Lemma 3.1 より, Section 4.1 で応用される次の事実が得られる.

**Proposition 3.4.** Let  $\mathcal{D}$  be a collection of subgroups of  $G$ . Assume that  $\mathcal{D}$  is closed under taking intersection and  $G \in \mathcal{D}$ . Let  $H$  be a subgroup of  $G$ . Write

$$H \cap \mathcal{D} = \{H \cap D \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

Then  $\Omega(H, H \cap \mathcal{D})$  is a PBR relative to  $H \cap \mathcal{D}$  of  $H$ .

### 3.3 Sign unit

$W = \langle S \rangle$  でコクセター系  $(W, S)$  をもつコクセター群とする. 元  $\prod_{x \in S} x \in W$  を  $W$  の Coxeter element と言う.  $W$  の Coxeter elements 全体は  $W$  の一つの共役類をつくる (see [Ca72, Theorem 10.3.1] for instance) ので, 共役類  $(c_S) \in \mathcal{cl}(W)$  で  $c_S$  が  $W$  の Coxeter element であり  $\mathcal{cl}(W)$  が  $W$  のひとつの共役類となるものがただ一つ存在する. 任意の元  $s \in S$  に対し,  $\varepsilon(s) = -1$  で定まる群準同型  $W \rightarrow \mathbb{R}^\times$  を  $\varepsilon$  で表す. 本稿では, それを  $W$  の signature と呼ぶ.

**Lemma 3.5.** *Let  $(W, S)$  be a Coxeter system. Let  $P$  be a parabolic subgroup of  $W$  with  $(P) = (W_J) \in C(\mathcal{P})$ , where  $J \subset S$ . Then  $P$  includes an element  $\sigma_P$  with  $(\sigma_P) = (c_J) \in \mathcal{cl}(W)$ , where  $c_J$  is a Coxeter element of the standard parabolic subgroup  $W_J$ . In particular,  $\varepsilon(\sigma_P) = \varepsilon(c_J) = (-1)^{|J|}$ .*

*Proof.* Since there exists an element  $w \in W$  such that  $P = {}^w W_J$  by assumption, the fact  $(\sigma_P) = (c_J)$  is obtained by putting  $\sigma_P = wc_J w^{-1}$ , where  $c_J$  is a Coxeter element of  $W_J$ . The definition of a Coxeter element shows the last equation.  $\square$

$\mathcal{P}$  で  $W$  のすべての parabolic subgroups の collection とする. 任意の  $H \leq W$  に対し,  $H$  を含むすべての parabolic subgroups の共通部分として定まる parabolic subgroup を  $P_H$  とする. Lemma 3.5 により,  $W$  の任意の parabolic subgroup  $P$  で  $(P) = (W_J)$  を満たすものは  $P = P_{\langle \sigma_P \rangle}$  であり  $(\sigma_P) = (c_J)$  を満たすような元  $\sigma_P$  を含む.

$$\gamma = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J] \in \Omega(W, \mathcal{P}).$$

とおく. 元  $\gamma$  は, また,  $\Omega(W)$  に含まれる.

**Lemma 3.6.** *Let  $\varphi^{\mathcal{P}}$  be the mark homomorphism of  $\Omega(W, \mathcal{P})$  and let  $\varepsilon$  be the signature of  $W$ . If  $\varphi^{\mathcal{P}}(\gamma) = (\gamma_H)_{(H) \in C(W)}$ , then  $\gamma_H = \gamma_{P_H}$  for all  $(H) \in C(W)$ , and  $\gamma_P = \varepsilon(\sigma_P)$  for all  $(P) \in C(\mathcal{P})$ , where  $\sigma_P$  is a  $W$ -conjugate for some Coxeter element of  $P$ .*

*Proof.* If  $H$  is a subgroup of  $W$ , then by the definition of  $P_H$ ,

$$\text{inv}_{P_H}(W/W_J) = \{\sigma W_J \mid P_H \leq {}^\sigma W_J\} = \{\sigma W_J \mid H \leq {}^\sigma W_J\} = \text{inv}_H(W/W_J)$$

for all  $J \subset S$ . Hence we have that  $\gamma_H = \gamma_{P_H}$  for all  $(H) \in C(W)$ . Since  $P = P_{\langle \sigma_P \rangle}$  for  $P \in \mathcal{P}$ , we have  $\text{inv}_P(W/W_J) = \text{inv}_{\langle \sigma_P \rangle}(W/W_J)$  for all  $J \subset S$ . By [So66, Theorem 2], we obtain that for each  $P \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_P) &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \pi_J(\sigma_P) \\ &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_{\langle \sigma_P \rangle}([W/W_J]) \\ &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_P([W/W_J]) \\ &= \varphi_P \left( \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J] \right) \\ &= \gamma_P. \end{aligned}$$

$\square$

### 3.4 The tom-Dieck homomorphism

$R_{\mathbb{R}}(G)$  で  $G$  の実表現全体の環,  $\Omega(G)^\times$  で  $\Omega(G)$  の単元群とする.  $\varphi(x) = (x_H)_{(H) \in C(G)}$  を満たす任意の  $x \in \Omega(G)$  に対し,  $x = \varphi^{-1}((x_H)_{(H) \in C(G)})$  と書く. [Di79, Proposition 5.5.9] により, 群準同型  $u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$  で任意の  $\mathbb{R}G$ -module  $V$  に対し

$$V \mapsto \varphi^{-1}((-1)^{\dim V^H})_{(H) \in C(G)}$$

ただし,  $V^H$  は  $V$  の  $H$ -invariants, が存在する.

$H \leq G$  とする. 有限生成左  $\mathbb{C}G$  加群  $V$  が  $G$  の  $\mathbb{C}$  指標  $\chi$  を与えるとする. 任意の  $H \leq G$  に対し,  $V^H$  は  $\mathbb{C}W_G(H)$  加群と見なすことができる.  $V^H$  の次元  $\dim V^H$  は, 内積  $\langle \chi|_H, 1_H \rangle_H$  に等しい.

$\bar{R}_{\mathbb{R}}(G)$  で,  $G$  の実数値をもつ  $\mathbb{C}$  指標全体の環とする. このとき, 以前の議論と [Yo90a, Theorem A] から  $u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^{\times}$  は,

$$\chi \mapsto \varphi^{-1} \left( ((-1)^{\langle \chi|_H, 1_H \rangle_H})_{(H) \in C(G)} \right)$$

により与えられる群準同型  $\bar{u}_G : \bar{R}_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^{\times}$  に拡張できる. この準同型は, *tom Dieck homomorphism* と呼ばれている. 本稿では, Mackey functor の定義はしないが, これらの準同型は  $\bar{R}_{\mathbb{R}}$  から  $\Omega^{\times}$  への  $G$  の Mackey functor としての射を与えていることに注意する (see [Yo90a, Lemma 3.5]).

$\bar{\ell}_G$  で,  $[G/H] \mapsto \chi_{\mathbb{C}[G/H]}$  で定まる線形化写像  $\Omega(G) \rightarrow \bar{R}_{\mathbb{R}}(G)$  とする. 置換指標なので,  $\chi_{\mathbb{C}[G/H]}$  は, 実数値  $\mathbb{C}$  指標である.

**Definition 3.7.** [Yo90a, Lemma 3.6][Ba10, p. 356] An *exponential map*  $\exp_G : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)^{\times}$  is the composition

$$\bar{u}_G \circ \bar{\ell}_G : \Omega(G) \rightarrow \bar{R}_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^{\times}$$

of the linearization map and the tom-Dieck homomorphism.

$\bar{u}_G$  は群準同型であり (see [Yo90a, p. 32] for instance)  $\bar{\ell}_G$  は環準同型であるので  $\exp_G$  は群準同型である. 定義より,  $\exp_G(0) = 1$  と  $\exp_G(1) = -1$  が成り立つことがわかる.

$\text{Jnd}_H^G$  で,

$$\text{Jnd}_H^G(y) = \varphi^{-1} \left( \left( \prod_{HgK \in H \backslash G/K} y_{H \cap gK} \right)_{(K) \in C(H)} \right)$$

で定義される乗法的写像  $\Omega(H) \rightarrow \Omega(G)$  とする ([Yo90a, p.40], [Ya05, p.111]). 以下のように, tom Dieck homomorphisms と exponential maps は, パーンサイド環の単元群の研究に有用であることを復習する.

**Theorem 3.8.** [Yo90a, Lemma 3.5, 3.6] Let  $H$  be a subgroup of  $G$ . Then the diagrams

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega(G) & \xrightarrow{\bar{\ell}_G} & \bar{R}_{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\bar{u}_G} & \Omega(G)^{\times} \\ \text{Res}_H^G \downarrow & & \text{res}_H^G \downarrow & & \downarrow \text{Res}_H^G \\ \Omega(H) & \xrightarrow{\bar{\ell}_H} & \bar{R}_{\mathbb{R}}(H) & \xrightarrow{\bar{u}_H} & \Omega(H)^{\times} \\ \\ \Omega(G) & \xrightarrow{\bar{\ell}_G} & \bar{R}_{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\bar{u}_G} & \Omega(G)^{\times} \\ \text{Ind}_H^G \uparrow & & \text{ind}_H^G \uparrow & & \uparrow \text{Jnd}_H^G \\ \Omega(H) & \xrightarrow{\bar{\ell}_H} & \bar{R}_{\mathbb{R}}(H) & \xrightarrow{\bar{u}_H} & \Omega(H)^{\times} \end{array}$$

are commutative.

### 3.5 The reduced Lefschetz invariant of a $G$ -poset

順序関係  $\leq$  が与えられた有限左  $G$  集合は,  $G$  の作用で  $\leq$  が不変であるとき,  $G$ -poset と呼ばれる.  $P$  を  $G$ -poset,  $Sd_i(P)$  を  $P$  の元からなる基数  $i+1$  の鎖  $x_0 < x_1 < \dots < x_i$  全体の集合とする.  $\Omega(G)$  は, 有限左  $G$  集合の圏の Grothendieck group であり, 有限左  $G$  集合  $X$  の同型類  $[X]$  で生成されるアーベル群であった.  $P$  の *Lefschetz invariant* は,

$$\Lambda_P = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [Sd_i(P)] \in \Omega(G),$$

$P$  の *reduced Lefschetz invariant*  $\tilde{\Lambda}_P$  は  $\tilde{\Lambda}_P = \Lambda_P - 1$  (cf. [Di79] for instance) で定義されるものとする.

## 4 Units of PBR

$n$  を正整数とする. 部分集合  $A \subseteq [n] := \{1, 2, \dots, n\}$  に対し,  $S(A)$  (resp.  $A(A)$ ) で  $A$  上の対称群 (resp. 交代群) とする.  $S_n := S([n])$ ,  $A_n := A([n])$  とおく.  $A = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq [n]$  のとき,  $S(i_1, \dots, i_m)$  (resp.  $A(i_1, \dots, i_m)$ ) を  $S(A)$  (resp.  $A(A)$ ) と書く.  $E = \{e\}$  を  $S_n$  の自明な部分群とする.

この節では,  $A_n$  の部分群の collection  $\mathfrak{A}_n$  を導入し,  $\mathfrak{A}_n$  の性質を述べる. 次の Section 5 で,  $\mathfrak{A}_n$  に関する単元群  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  を扱う.

### 4.1 Young subgroups and a collection $\mathfrak{A}_n$

$[n]$  の分割  $\pi$  とは, 集合  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ , ただし,  $\pi_i$  は空でない部分集合  $\pi_i \subseteq [n]$  で  $\pi = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_k$  と  $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$  を任意の  $1 \leq i \neq j \leq k$  に対し満たすものである.  $\pi$  の型  $t(\pi)$  とは,  $[n]$  の分割  $(1^{e_1} 2^{e_2} \dots n^{e_n})$ , ただし,  $n = \sum_{i=1}^k |\pi_i|$  を満たすものである.  $S_n$  の部分群  $Y(\pi) := S(\pi_1) \times \dots \times S(\pi_k)$  は,  $\pi$  に対応する Young 部分群と呼ばれる.  $\mathfrak{Y}_n$  は,  $S_n$  のすべての Young 部分群の collection, また,  $A_n$  の部分群の collection を

$$\mathfrak{A}_n := \mathfrak{Y}_n \cap A_n = \{Y \cap A_n \mid Y \in \mathfrak{Y}_n\}$$

で定める.  $\mathfrak{Y}_n$  は共通部分をとる操作で閉じていて  $S_n \in \mathfrak{Y}_n$  を満たすことを注する. したがって Proposition 3.4 より,  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  は,  $A_n$  の  $\mathfrak{A}_n$  に関する PBR になる.

*Remark 1.* Let  $\pi$  be a partition of  $[n]$ .

1.  $Y(\pi) = E$  if and only if  $t(\pi) = (1^n)$ .
2.  $Y(\pi) \cap A_n = E$  if and only if  $t(\pi) = (1^n)$  or  $t(\pi) = (1^{n-2} 2^1)$ .
3. For any  $g \in S_n$ , set  $g(\pi) := \{g(\pi_1), \dots, g(\pi_k)\}$ . Then  $g(\pi)$  is a partition of  $[n]$ , and  $Y(g(\pi)) = {}^g Y(\pi)$  holds.

### 4.2 Subgroups in $\mathfrak{A}_n$

はじめに, [Su82, (4.19)] から, 直積群  $H \times K$  の部分群  $U$  の構造について復習する.  $\text{pr}_H$  と  $\text{pr}_K$  を  $H \times K$  の対応する射影, さらに,  $H_1, K_1$  を

$$\begin{aligned} H_1 &:= U \cap H \leq \text{pr}_H(U) \leq H, \\ K_1 &:= U \cap K \leq \text{pr}_K(U) \leq K \end{aligned}$$

とする. このとき, 任意の  $u \in U$  に対し,  $\text{pr}_H(u)H_1 \mapsto \text{pr}_K(u)K_1$  で定義される群同型  $\varphi_U : \text{pr}_H(U)/H_1 \rightarrow \text{pr}_K(U)/K_1$  を得る. また,  $U$  は,  $\varphi_U$  を通した  $\text{pr}_H(U)$  と  $\text{pr}_K(U)$  の引き戻し

$$\text{pr}_H(U) \times^{\varphi_U} \text{pr}_K(U) := \{(h, k) \in \text{pr}_H(U) \times \text{pr}_K(U) \mid \varphi_U(hH_1) = kK_1\}$$

として与えられる.

この事実を我々の Young subgroups の場合に適用する.  $Y = Y(\pi) \in \mathfrak{Y}_n$ , ただし,  $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$  とする.  $Y \neq S_n$  と  $Y \neq E$ , すなわち,  $k \geq 2$  と  $t(\pi) \neq (1^n)$  を仮定する. 共通部分  $Y \cap A_n$  の構造が, 以下のようになることがわかる.

- (1) Suppose that  $|\pi_1| \geq 2$  and  $|\pi_i| = 1$  for all  $2 \leq i \leq k$ . Then, clearly  $Y \cap A_n = A(\pi_1)$ .
- (2) Suppose that  $|\pi_1| \geq 2$  and  $|\pi_k| \geq 2$ . Then by setting  $H := S(\pi_1) \times \dots \times S(\pi_{k-1}) \neq E$  and  $K := S(\pi_k) \neq E$ , we have that  $Y = H \times K$  and

$$U := Y \cap A_n = (H \times K) \cap A_n \leq H \times K.$$

Note that  $\text{pr}_H(U) = H$  and  $\text{pr}_K(U) = K$  because of  $S(\pi_1) \neq E$  and  $S(\pi_k) \neq E$ . Put

$$\begin{aligned} H_1 &:= U \cap H = H \cap A_n = (S(\pi_1) \times \dots \times S(\pi_{k-1})) \cap A([n] \setminus \pi_k), \\ K_1 &:= U \cap K = K \cap A_n = S(\pi_k) \cap A_n = A(\pi_k). \end{aligned}$$

Then we have a group isomorphism  $\varphi_U : H/H_1 \rightarrow K/K_1 \cong C_2$ , and the pullback  $U = \{(h, k) \in H \times K \mid \varphi_U(hH_1) = kK_1\}$ . In particular, identifying two transpositions  $(\alpha, \beta) \in S(\pi_1) \leq H$  and  $(\gamma, \delta) \in S(\pi_k) \leq K$ , we obtain that

$$\begin{aligned} Y \cap A_n &= U = \langle H_1, K_1, (\alpha, \beta)(\gamma, \delta) \rangle \\ &= \left( (S(\pi_1) \times \cdots \times S(\pi_{k-1})) \cap A([n] \setminus \pi_k) \right) \rtimes A(\pi_k) \rtimes \langle (\alpha, \beta)(\gamma, \delta) \rangle. \end{aligned}$$

上のようになりかになった  $U$  の構造は collection  $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{Y}_n \cap A_n$  が,  $m < n$  をみたすより小さな collection  $\mathfrak{A}_m$  から機能的に決定されることを示している.

### 4.3 Conjugacy classes of $\mathfrak{A}_n$

$[n]$  のふたつの分割  $\pi, \pi'$  の順序  $\pi' \leq \pi$  は,  $\pi'$  が  $\pi$  の細分であるとき, すなわち, 任意の  $\pi_i \in \pi$  が, いくつかの  $\pi'_j$  の和集合であるときとして定義される. 有限群  $G$  の二つの部分群  $H, K$  に対し,  $H$  が  $K$  と  $G$ -共役であるとき,  $H \sim_G K$  と書く.

**Lemma 4.1.** *Let  $\pi' = \{\pi'_1, \dots, \pi'_\ell\}$  and  $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$  be partitions of  $[n]$ . Suppose that  $t(\pi') \neq (1^{n-2}2^1)$ . Then  $Y(\pi') \cap A_n \leq Y(\pi) \cap A_n$  implies  $\pi' \leq \pi$ . The converse implication always holds without any assumption.*

*Proof.* Assume that  $\pi' \not\leq \pi$ . Then there exist  $\pi_i \in \pi$  and  $\pi'_j \in \pi'$  such that  $\pi_i \cap \pi'_j \neq \emptyset$  and  $\pi'_j \not\subseteq \pi_i$ . Take  $\alpha \in \pi_i \cap \pi'_j$  and  $\beta \in \pi'_j \setminus \pi_i$ , so that,  $\alpha \neq \beta$  and  $|\pi'_j| \geq 2$ .

Suppose that  $|\pi'_j| \geq 3$ . Then  $S(\pi'_j)$  contains a 3-cycle  $\sigma := (\alpha, \beta, \gamma)$ , and  $\sigma \in Y(\pi') \cap A_n$ . But since  $\beta = \sigma(\alpha) \in \sigma(\pi_i)$  and  $\beta \notin \pi_i$ , we have that  $\sigma(\pi_i) \neq \pi_i$  and  $\sigma \notin Y(\pi) \cap A_n$ . Thus  $Y(\pi') \cap A_n \not\leq Y(\pi) \cap A_n$ .

Suppose next that  $|\pi'_j| = 2$ . By our assumption  $t(\pi') \neq (1^{n-2}2^1)$ , there exists  $\pi'_t \in \pi'$  such that  $\pi'_t \neq \pi'_j$  and  $|\pi'_t| \geq 2$ . Take transpositions  $(\alpha, \beta) \in S(\pi'_j)$  and  $(\gamma, \delta) \in S(\pi'_t)$ . Then  $\sigma := (\alpha, \beta)(\gamma, \delta) \in Y(\pi') \cap A_n$ . But since  $\sigma(\pi_i) \neq \pi_i$  by the same way as above, we obtain that  $Y(\pi') \cap A_n \not\leq Y(\pi) \cap A_n$ . The proof is complete.  $\square$

**Lemma 4.2.** *Let  $\pi'$  and  $\pi$  be partitions of  $[n]$  whose types are not  $(1^{n-2}2^1)$ . Then the followings are equivalent.*

1.  $Y(\pi') \sim_{S_n} Y(\pi)$ .
2.  $Y(\pi') \sim_{A_n} Y(\pi)$ .
3.  $Y(\pi') \cap A_n \sim_{A_n} Y(\pi) \cap A_n$ .

*Proof.* Let  $\pi' = \{\pi'_1, \dots, \pi'_\ell\}$ . We may assume that  $t(\pi') \neq (1^n)$  and  $|\pi'_1| \geq 2$ . First we note that  $Y(\pi') \sim_{S_n} Y(\pi)$  implies  $Y(\pi') \sim_{A_n} Y(\pi)$  since  $S_n = A_n \rtimes \langle (\alpha, \beta) \rangle$  where  $\alpha, \beta \in \pi'_1$ . Thus it is enough to show that (3)  $\Rightarrow$  (2).

Suppose that  $Y(\pi') \cap A_n \sim_{A_n} Y(\pi) \cap A_n$ . Then, for some  $a \in A_n$ ,  $Y(\pi') \cap A_n = {}^a(Y(\pi) \cap A_n) = Y(a(\pi)) \cap A_n$ . By Lemma 4.1,  $\pi' = a(\pi)$  and  $Y(\pi') = Y(a(\pi)) = {}^aY(\pi)$ . The proof is complete.  $\square$

ふたつの Young subgroups  $Y(\pi')$  と  $Y(\pi)$  が  $S_n$ -共役であることと  $t(\pi') = t(\pi)$  が成り立つことが同値であることを注意する. 以下は, Remark 1, 2 そして Lemma 4.2 の帰結である.

**Proposition 4.3.**  $|C(\mathfrak{A}_n)| = |C(\mathfrak{Y}_n)| - 1$  where  $|C(\mathfrak{Y}_n)|$  is given by the number of all partitions of  $n$ .

### 4.4 Some Lemmas on subgroups in $\mathfrak{A}_n$

以下で, Section 5 で用いられる二つの補題を準備する.

**Lemma 4.4.** *Let  $n$  be an integer with  $n \geq 5$  ( $n - 2 \geq 3$ ). Put*

$$\begin{aligned} H &:= (S(1, 2, \dots, n-2) \times S(n-1, n)) \cap A_n \in \mathfrak{A}_n, \\ K &:= A(1, 2, \dots, n-2) \leq H, \quad K \in \mathfrak{A}_n. \end{aligned}$$

*Then we have the following.*

1.  $H \cong S_{n-2}$  and  $N_{A_n}(H) = H$ .
2.  $K \cong A_{n-2}$  and  $N_{A_n}(K)/K \cong S_2$ .

*Proof.* Set  $A := \{1, 2, \dots, n-2\}$ . Then  $H = (S(A) \times S(n-1, n)) \cap A_n$  and  $K = A(A)$ . According to Section 4.2, a subgroup  $H$  can be expressed as

$$\begin{aligned} H &= (A(A) \times E) \rtimes \langle (1, 2)(n-1, n) \rangle \\ &= A(A) \rtimes \langle (1, 2)(n-1, n) \rangle \cong S_{n-2}. \end{aligned}$$

From this structure of  $H$ , it is clear that  $N_{S_n}(H) = S(A) \times S(n-1, n)$ . Thus  $N_{A_n}(H) = N_{S_n}(H) \cap A_n = (S(A) \times S(n-1, n)) \cap A_n = H$ . On the other hand, since  $N_{S_n}(K) = S(A) \times S(n-1, n)$ , we have that

$$N_{A_n}(K) = N_{S_n}(K) \cap A_n = H = K \rtimes \langle (1, 2)(n-1, n) \rangle.$$

Thus  $N_{A_n}(K)/K \cong \langle (1, 2)(n-1, n) \rangle \cong S_2$ . The proof is complete.  $\square$

**Lemma 4.5.** *Let  $n$  be an integer with  $n \geq 6$  ( $n-3 \geq 3$ ). Put*

$$\begin{aligned} H &:= (S(1, 2, \dots, n-3) \times S(n-2, n-1)) \cap A_n \in \mathfrak{A}_n, \\ K &:= A(1, 2, \dots, n-3) \leq H, \quad K \in \mathfrak{A}_n. \end{aligned}$$

*Then we have the following.*

1.  $H \cong S_{n-3}$  and  $N_{A_n}(H) = H$ .
2.  $K \cong A_{n-3}$  and  $N_{A_n}(K)/K \cong S_3$ .

*Proof.* Set  $\Delta := \{1, 2, \dots, n-3\}$ . Then  $H = (S(\Delta) \times S(n-2, n-1)) \cap A_n$  and  $K = A(\Delta)$ . By using the similar argument as in the proof of Lemma 4.4, we have that

$$\begin{aligned} H &= (A(\Delta) \times E) \rtimes \langle (1, 2)(n-2, n-1) \rangle \\ &= A(\Delta) \rtimes \langle (1, 2)(n-2, n-1) \rangle \cong S_{n-3}, \\ N_{S_n}(H) &= S(\Delta) \times S(n-2, n-1), \\ N_{A_n}(H) &= N_{S_n}(H) \cap A_n = (S(\Delta) \times S(n-2, n-1)) \cap A_n = H. \end{aligned}$$

On the other hand,  $N_{S_n}(K) = S(\Delta) \times S(n-2, n-1, n)$ . According to Section 4.2, we have that

$$\begin{aligned} N_{A_n}(K) &= N_{S_n}(K) \cap A_n \\ &= (A(\Delta) \times A(n-2, n-1, n)) \rtimes \langle (1, 2)(n-2, n-1) \rangle \\ &= A(\Delta) \rtimes \langle (n-2, n-1, n), (1, 2)(n-2, n-1) \rangle \\ &\cong A(\Delta) \rtimes S_3 = K \rtimes S_3 \end{aligned}$$

Thus  $N_{A_n}(K)/K \cong S_3$ . The proof is complete.  $\square$

## 5 Units of $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$

この節では、 $A_n$  の  $\mathfrak{A}_n$  に関する単元群  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  の部分群を究明する。

### 5.1 Subgroup of rank 2

この部分節では、単元群  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  の基本可換群としての階数が<sup>3</sup> 2である部分群  $T$  を構成する。  $\varepsilon_n$  を、 $S_n$  の符号とする。

**Lemma 5.1.** *[IO15, Corollary 5.2] Let  $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$  be a PBR relative to the Young subgroups  $\mathfrak{Y}_n$  of  $S_n$  for  $n \geq 2$  and*

$$\alpha = \sum_{(Y) \in C(\mathfrak{Y}_n)} \frac{1}{|W_{S_n}(Y)|} \left( \sum_{H \in \mathfrak{Y}_n} \mu_{\mathfrak{Y}_n}(Y, H) \varepsilon_n(H) \right) [S_n/Y],$$



where  $\varepsilon_n(H)$  is the value  $\varepsilon_n(g_H)$  and  $g_H$  is a representative of conjugacy class  $(g_H) \in \mathcal{cl}(S_n)$  which corresponds to the conjugacy class  $(H) \in C(S_n)$ . Then

$$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)^\times = \langle -1, \alpha \rangle.$$

$$\nu := \text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha)$$

とおく. このとき Eq. (3.1) と  $A_n$  の collection  $\mathfrak{A}_n$  の定義により,  $\nu \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  が成り立つ.  $T = \langle -1, \nu \rangle$  とおく.

Proposition 5.3 を証明するため, 以下の Lemma 5.2 が必要である.  $H \leq S_n$  に対し, Young subgroup  $Y_H$  を,  $H$  を含むすべての Young subgroups の共通部分として定義する.  $S_n$  の任意の分割  $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_r\}$  に対応する Young subgroup  $Y$  は, a product  $\sigma_Y$  of pairwise disjoint  $|\pi_i|$ -cycles for  $i = 1, 2, \dots, r$  satisfying  $Y = Y_{\langle \sigma_Y \rangle}$ .

**Lemma 5.2.** [OTY16, Lemma 3.1] If  $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H) \in C(S_n)}$ , then  $\alpha_H = \alpha_{Y_H}$  for all  $(H) \in C(S_n)$ , and  $\alpha_Y = \varepsilon_n(\sigma_Y)$  for all  $(Y) \in C(\mathfrak{Y}_n)$ .

**Proposition 5.3.** Let  $T$  be the subgroup of  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  defined above. Then  $T$  is an elementary abelian 2-group of rank 2.

*Proof.* It suffices to show that  $\nu \neq \pm 1$ . Since  $Y_{A_k} = S_k$  for  $k = n-1, n$ ,

$$\varphi_{A_k}(\alpha) = \alpha_{A_k} = \alpha_{Y_{A_k}} = \alpha_{S_k} = \varepsilon_k(\sigma_{S_k})$$

by Lemma 5.2. Trivially,  $\varepsilon_{n-1}(\sigma_{S_{n-1}}) \neq \varepsilon_n(\sigma_{S_n})$ , we have

$$\varphi_{A_{n-1}}(\text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha)) = \varphi_{A_{n-1}}(\alpha) \neq \varphi_{A_n}(\alpha) = \varphi_{A_n}(\text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha))$$

by Eq.(3.2). This shows  $\text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha) \neq \pm 1$  and completes the proof.  $\square$

## 5.2 Some expressions of $\nu$

この節では, Section 5.1 で現れる単元  $\nu := \text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha) \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  のいくつかの表現方法について検討する.

### 5.2.1 Parabolic expression

任意の  $1 \leq i \leq n-1$  に対し,  $s_i := (i, i+1) \in S_n$ ,  $S := \{s_1, \dots, s_{n-1}\} \subseteq S_n$  とする.  $W := S_n$  は Coxeter system  $(W, S)$  をもつ  $A_{n-1}$  型の有限 Coxeter group である. 任意の部分集合  $J \subseteq S$  に対し,  $J$  で生成された部分群  $W_J := \langle J \rangle$  を standard parabolic subgroup of  $W$  と呼ぶ. より一般的に,  $W$  の部分群は, ある  $J \subseteq S$  に対し  $W_J$  と  $W$  共役であるとき, parabolic subgroup という.  $W_J$  は,  $S_n$  の Young subgroup であり,  $\mathfrak{Y}_n$  とすべての parabolic subgroups of  $W$  は等しいことを注意する. Coxeter systems の言葉を用いると, 以下の結果が Lemmas 3.5 and 3.6 から得られる.

**Proposition 5.4.** Let  $G$  be a finite Coxeter group with Coxeter system  $(G, \Sigma)$ , and let  $\gamma$  be an element

$$\sum_{J \subseteq \Sigma} (-1)^{|J|} [G/G_J]$$

of the PBR  $\Omega(G, \mathcal{P})$  relative to  $\mathcal{P}$  of  $G$  where  $G_J$  is a standard parabolic subgroup corresponding to  $J$ , and  $\mathcal{P}$  is the set of all parabolic subgroups of  $G$ . Then  $\gamma$  is a non-identity unit of  $\Omega(G, \mathcal{P})$ .

$W := S_n$  のとき, 上の結果を Coxeter system  $(W, S)$  に応用すると,  $\alpha' := \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} [S_n/W_J]$  が,  $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$  の非自明な単元であることがわかる. ところが, Lemma 5.1 より  $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)^\times = \langle -1, \alpha \rangle \cong C_2 \times C_2$  なので, 二つを比較して  $\alpha = \alpha'$  を得る.

$\nu := \text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha) \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  であったので,  $\alpha$  は  $\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} [S_n/W_J] \in \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)^\times$  のように表される.

$$W_J \backslash S_n / A_n = \begin{cases} \{W_J e A_n\} & J \neq \emptyset, \\ \{W_J e A_n, W_J(1, 2)A_n\} & J = \emptyset \end{cases}$$

が成り立つ。

Mackey decomposition formula を応用して、 $\alpha$  と同様に、 $\nu$  の、 $S_n$  の parabolic subgroups を用いた表現を得る。

$$\begin{aligned}
 \nu &= \text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha) = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \text{Res}_{A_n}^{S_n}([S_n/W_J]) \\
 &= \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \left( \sum_{W_J t A_n \in W_J \backslash S_n / A_n} [A_n / {}^t W_J \cap A_n] \right) \\
 &= [A_n/E] + [A_n/E] + \sum_{\emptyset \neq J \subseteq S} (-1)^{|J|} [A_n/W_J \cap A_n] \\
 &= [A_n/E] + \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} [A_n/W_J \cap A_n] \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n).
 \end{aligned}$$

### 5.2.2 Exponential expression

Proposition 5.6 を証明する以下の補題を思い出すことにする。

**Lemma 5.5.** [OTY16, Corollary 4.3] *Let  $\alpha$  be the unit of Lemma 5.1. Then  $\alpha$  is an image of the tom-Dieck homomorphism.*

**Proposition 5.6.** *Let  $\nu$  be the unit  $\text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha)$ . Then  $\nu$  is an image of the tom-Dieck homomorphism.*

*Proof.* Theorem 3.8 and Lemma 5.5 show the proposition.  $\square$

$\alpha$  を与える  $\overline{R}_{\mathbb{R}}(A_n)$  の元を決定できる。

**Proposition 5.7.** *Let  $\nu$  be the unit  $\text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha)$ . Then*

$$\nu = (-1)^n \text{Jnd}_{A_n \cap S_{n-1}}^{A_n}(-1) = \exp_{A_n}(n[A_n/A_n] + [A_n/A_n \cap S_{n-1}]).$$

*In particular,  $\nu$  is an image of the exponential map  $\exp_{A_n}$ .*

*Proof.* We have

$$\alpha = (-1)^n \overline{u}_{S_n}(p_{[n]})$$

by [OTY16, p.374], where  $p_{[n]}$  is a permutation character obtained by the  $S_n$ -set  $[n]$ . Since it is easy to see that  $[n]$  is isomorphic to  $S_n/S_{n-1}$  and  $\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(1) \cong S_n/S_{n-1}$  as  $S_n$ -sets, we have

$$\alpha = (-1)^n \overline{u}_{S_n}(\bar{\ell}(S_n/S_{n-1})) = (-1)^n \exp_{S_n}(\text{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(1)).$$

Theorem 3.8 and Mackey decomposition [Yo90a, Lemma 3.1] show

$$\begin{aligned}
 \nu &= \text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha) \\
 &= \text{Res}_{A_n}^{S_n}((-1)^n \text{Res}_{A_n}^{S_n}(\text{Jnd}_{A_n}^{S_n}(\exp_{A_n}(1)))) \\
 &= (-1)^n (\text{Res}_{A_n}^{S_n} \circ \text{Jnd}_{A_n}^{S_n})(-1) \\
 &= (-1)^n \prod_{A_n g S_{n-1} \in A_n \backslash S_n / S_{n-1}} \text{Jnd}_{A_n \cap {}^g S_{n-1}}^{A_n} \circ \text{Res}_{A_n \cap {}^g S_{n-1}}^{S_{n-1}} \circ c_g^{S_{n-1}}(-1) \\
 &= (-1)^n \text{Jnd}_{A_n \cap S_{n-1}}^{A_n}(-1) \\
 &= \exp_{A_n}(1)^n \text{Jnd}_{A_n \cap S_{n-1}}^{A_n}(\exp_{A_n \cap S_{n-1}}(1)) \\
 &= \exp_{A_n}(n[A_n/A_n]) \exp_{A_n}(\text{Ind}_{A_n \cap S_{n-1}}^{A_n}(1)) \\
 &= \exp_{A_n}(n[A_n/A_n] + [A_n/A_n \cap S_{n-1}]).
 \end{aligned}$$

$\square$

本質的には [Th87, Proposition 5.1] で証明された、以下の結果を思い出すことにする。

**Lemma 5.8.** [OTY16, Proposition 4.1] Let  $X$  be a finite  $G$ -set. The reduced Lefschetz invariant  $\tilde{A}_{P(X)}$ , where  $P(X)$  is the poset which consisted of nonempty and proper subsets of  $X$ , is the image of  $\exp_G$ , more precisely,

$$\tilde{A}_{P(X)} = \exp_G([X]).$$

**Corollary 5.9.** Let  $\nu$  be the unit  $\text{Res}_{A_n}^{S_n}(\alpha)$ . Let  $X$  be an  $A_n$ -set  $n(A_n/A_n) \cup A_n/A_n \cap S_{n-1}$ . Then

$$\nu = \tilde{A}_{P(X)} = \exp_G([X]).$$

*Proof.* This follows from Proposition 5.7 and Lemma 5.8.  $\square$

### 5.3 Subgroup of rank 3

この節では、一般バーンサイド環の理論を応用して、 $\pm(2i-1) \notin T = \langle -1, \nu \rangle$  を満たす  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  の単元に対応する原始的べき等元  $i$  を構成する。これらの単元が  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  の部分群  $U$  を形成する。

**Lemma 5.10.** Let  $n$  be a positive integer with  $n \geq 5$ . Then there is a unique subgroup  $H$  of  $\mathfrak{A}_n$  up to conjugation in  $A_n$  such that

1.  $H$  is a self-normalizing subgroup of  $A_n$ ,
2.  $H$  is isomorphic to a symmetric group  $S_k$ , where

$$k = \begin{cases} n-2, & \text{if } n \text{ is odd,} \\ n-3, & \text{if } n \text{ is even,} \end{cases}$$

3.  $H$  contains a subgroup  $K \in \mathfrak{A}_n$  of index 2 with

$$W_{A_n}(K) \cong \begin{cases} S_2, & \text{if } n \text{ is odd,} \\ S_3, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

*Proof.* If  $n$  is an odd, then we have a subgroup  $H \in \mathfrak{A}_n$  which satisfies all conditions of the lemma by Lemma 4.4. If  $n$  is even, then we have also a subgroup  $H \in \mathfrak{A}_n$  which satisfies all conditions of the lemma by Lemma 4.5.  $\square$

**Lemma 5.11.** Let  $H$  and  $K$  be subgroups in  $\mathfrak{A}_n$  for  $n \geq 5$  satisfying conditions of Lemma 5.10. If  $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$ , then there exists  $gD \in W_{A_n}(D)$  such that  $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$  if and only if  $(D) = (K)$  or  $(H)$ .

*Proof.* If  $(D) = (H)$ , then  $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$  by Lemma 5.10.1 clearly. If  $(D) = (K)$ , then there exists  $g \in N_{A_n}(K)$  such that  $gK \in W_{A_n}(K)$  has order 2 by Lemma 5.10.3. Then  $\langle g \rangle D \cong H$ . Since  $\overline{\langle g \rangle D} = \langle g \rangle D$ , we have  $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$ .

On the other hand, we suppose that  $gD \in W_{A_n}(D)$  satisfies  $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$ . If  $\langle g \rangle D \in \mathfrak{A}_n$ , then we have  $(\langle g \rangle D) = (H)$  because  $\overline{\langle g \rangle D} = \langle g \rangle D$ . The structure of  $H$  yields  $D \cong A_k$  or  $S_k$ , so  $(D) = (K)$  or  $(H)$ . If  $\langle g \rangle D \notin \mathfrak{A}_n$ , we have  $\langle g \rangle D \subsetneq H$ , because

$$\overline{\langle g \rangle D} = \bigcap_{\langle g \rangle D \subseteq T \in \mathfrak{A}_n} T.$$

However,  $H$  has a maximal subgroup  $K$  with  $K \in \mathfrak{A}_n$  by Lemma 5.10.3. This contradicts  $(\overline{\langle g \rangle D}) = (H)$ . We obtain the fact that  $\langle g \rangle D \notin \mathfrak{A}_n$  did not happen.  $\square$

$\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  の単元と  $2i \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  をみたすべき等元  $i \in \mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  との間には、一対一の関係がある。Idem( $u$ ) で、単元  $u \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  に対応する  $\mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  のべき等元、すなわち、

$$\text{Idem}(u) = \frac{1}{2}(u+1)$$

とする。Eq. (3.3) と同様に、部分群  $H \in \mathfrak{A}_n$  に対し、 $\mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  の原始的べき等元ですべての  $(K) \in C(\mathfrak{A}_n)$  に対し

$$\varphi_K(e_H^{\mathfrak{A}_n}) = \begin{cases} 1 & (H) = (K), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

を満たすものを  $e_H^{\mathfrak{A}_n} \in \mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  と書く. このとき, Eq. (3.3) により, 原始的べき等元  $e_H^{\mathfrak{A}_n}$  の公式がえられる.

**Lemma 5.12.** *Let  $e_H^{\mathfrak{A}_n}$  be a primitive idempotent of  $\mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$  for  $H \in \mathfrak{A}_n$ . Then*

$$e_H^{\mathfrak{A}_n} = \frac{1}{|N_{A_n}(H)|} \sum_{D \in \mathfrak{A}_n} |H| \mu_{\mathfrak{A}_n}(D, H) [A_n/D].$$

**Theorem 5.13.** *Let  $H$  be a subgroup in  $\mathfrak{A}_n$  for  $n \geq 5$  satisfying all conditions of Lemma 5.10. Then  $2e_H^{\mathfrak{A}_n}$  is an element of  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ . In particular,  $2e_H^{\mathfrak{A}_n} - 1$  is an element of  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$ .*

*Proof.* Let  $\tilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n}$  be an element of  $\tilde{\Omega}(A_n, \mathfrak{A}_n)$  defined by

$$(\tilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n})_{(D)} = \begin{cases} 1 & (D) = (H), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5.1)$$

for all  $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$ . Then we have  $e_H^{\mathfrak{A}_n} = \varphi^{\mathfrak{A}_n-1}(\tilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n}) \in \mathbb{Q}\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)$ . A  $(D)$ -component of an image of  $e_H^{\mathfrak{A}_n}$  by  $\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}$  is presented as

$$(\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(e_H^{\mathfrak{A}_n}))_{(D)} = \sum_{gD \in WD} (\tilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n})_{(g)D} \pmod{|WD|}.$$

Take a subgroup  $K$  of  $H$  satisfying Lemma 5.10.3. Then by Lemma 5.11.

$$(\overline{(g)D}) = (H) \Leftrightarrow (D) = (K) \text{ or } (H)$$

for  $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$  and  $gD \in WD$ , so we have that

$$(\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(e_H^{\mathfrak{A}_n}))_{(D)} = \begin{cases} 1 & \text{mod } |WD| & (D) = (H) \text{ or } (K) \text{ with } n \text{ even,} \\ 3 & \text{mod } |WD| & (D) = (K) \text{ with } n \text{ odd,} \\ 0 & \text{mod } |WD| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since we have that

$$(\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(2e_H^{\mathfrak{A}_n}))_{(D)} = \begin{cases} 2 & \text{mod } |WD| & (D) = (H) \text{ or } (K) \text{ with } n \text{ even,} \\ 6 & \text{mod } |WD| & (D) = (K) \text{ with } n \text{ odd,} \\ 0 & \text{mod } |WD| & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and that  $|WH| = 1$ ,

$$|WK| = \begin{cases} 2 & (D) = (H) \text{ or } (K) \text{ with } n \text{ even,} \\ 6 & (D) = (K) \text{ with } n \text{ odd,} \end{cases}$$

by Lemma 5.11, we obtain that  $\psi^{\mathfrak{A}_n} \circ \varphi^{\mathfrak{A}_n}(2e_H^{\mathfrak{A}_n}) = 0$ . This completes the proof of the theorem.  $\square$

Lemma 5.13 のすべての条件を満たす部分群  $H \in \mathfrak{A}_n$  に対し,  $\xi = 2e_H^{\mathfrak{A}_n} - 1 \in \Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  とおく.  $U$  で部分群  $\langle -1, \nu, \xi \rangle$  of  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  を表す. Theorem 5.13 から得られる結果の一つとして,  $U$  の階数が3であることがわかる.

**Corollary 5.14.** *Let  $U$  be the subgroup of  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  for  $n \geq 5$  defined above. Then  $U$  is an elementary abelian 2-group of rank 3.*

*Proof.* Eq. (5.1) shows that

$$\varphi_D(\xi) = (2\tilde{e}_H^{\mathfrak{A}_n} - 1)_{(D)} = \begin{cases} 1 & (D) = (H), \\ -1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for all  $(D) \in C(\mathfrak{A}_n)$ . This shows that  $\xi \neq \pm 1$  and  $\xi \neq \pm \nu$ .  $\square$

**Remark 2.** It is checked that  $\Omega(A_3, \mathfrak{A}_3)^\times = \langle -1 \rangle$  and  $\Omega(A_4, \mathfrak{A}_4)^\times = \langle -1, \nu \rangle$ . Furthermore, the computer calculation shows that, for  $n = 5, 6, 7$ ,  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times = \langle -1, \nu, \xi \rangle$  of rank 3. So is it true that  $\Omega(A_n, \mathfrak{A}_n)^\times$  for  $n \geq 5$  is always of rank 3?

## 参考文献

- [Ba10] Barker, L.: *Torihave morphisms I: resurrecting the virtual permutation sets annihilated by linearization*, Comm. Algebra **39** (2010) 355–395.
- [Ca72] Carter, R. W.: *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, **28**, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.
- [Di79] tom Dieck, T.: *Transformation Groups and Representation Theory*, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer-Verlag, Berlin, (1979).
- [IO15] Idei, H.; Oda, F.: *The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.
- [OS] Oda, F.; Sawabe, M.: *Unit group of a partial Burnside ring of an alternating group*, preprint.
- [OTY16] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T. : *The unit group of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of the symmetric group*, J. Algebra **460** (2016), 370–379.
- [So66] Solomon, L.: *The orders of the finite Chevalley groups*, J. Algebra **3**, (1966), 376 – 393.
- [Th87] Thévenaz, J.: *Permutation representations arising from simplicial complexes*, J. Combin. Theory Ser. A **46**, (1987) 121–155.
- [Su82] Suzuki, M.: *Group theory I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **247**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Ya05] Yalçın, E.: *An induction theorem for the unit groups of Burnside rings of 2-groups*, J. Algebra **289** (2005), 105–127.
- [Yo90a] Yoshida, T.: *On the unit groups of Burnside rings*, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 31–64.
- [Yo90b] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.